①   ریاضیات مهندسی (خانم زمانی - مرکز کوشا)

F-zamani

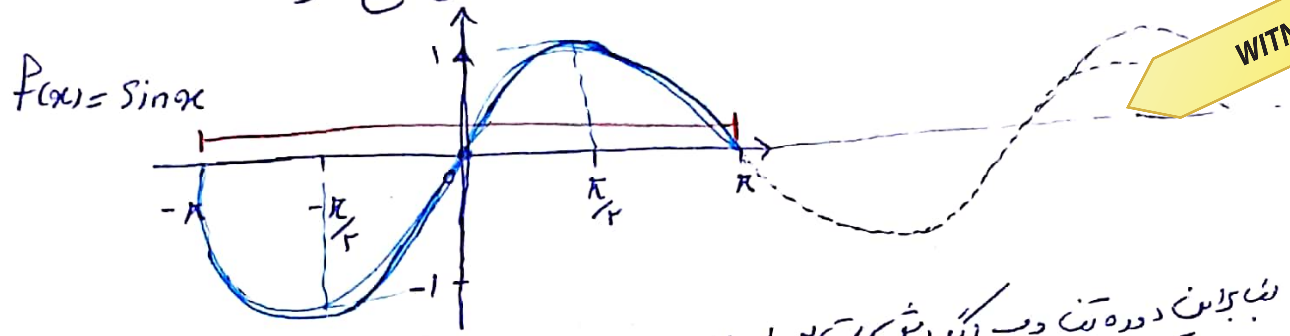
فصل اول:

سری فوریه: (جلسه اول)

تعریف: تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هرگاه برای هر $x\in D_f$، D_f (دامنه (ورودی) f است)، عدد حقیقی مثبت T وجود داشته باشد که $f(x+T)=f(x)$. و عدد T را دوره تناوب f گویند.

* یعنی شکل نمودار تابع f در هر T دوره عیناً تکرار شود. مثل تابع سینوس

$f(x)=\sin x$



بنابراین دوره تناوب (گردش) تابع سینوس به اندازه 2π رادیان یا ۳۶۰ درجه است.

* دوره تناوب توابع $\sin x$، $\cos x$ برابر $T=2\pi$ است.

* دوره تناوب توابع $\tan x$، $\cot x$ برابر $T=\pi$ است.

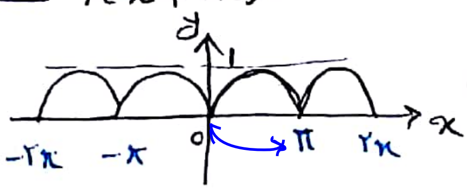
* دوره تناوب توابع $\sin kx$، $\cos kx$ برابر $T=\frac{2\pi}{k}$ است. (یعنی k برابر شود دوره گردش در $1/k$ ضرب می‌شود)

* دوره تناوب توابع $\tan kx$، $\cot kx$ برابر $T=\pi/k$ است.

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بنویسید.

الف) $f(x+2\pi)=f(x)$ ⟵ جواب: طبق تعریف دوره تناوب $T=2\pi$ است.

ب)



⟵ جواب: طبق شکل می‌بینیم هر π گردش شکل تابع عیناً تکرار می‌شود به عبارتی فاصله هر تکه منحنی شبیه هم π است. پس $T=\pi$.

تعریف: تابع $f(x)$ را یک تابع فرد گوییم هرگاه: برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-x\in D_f$ و

② $f(-x)=-f(x)$

به عبارت دیگر یعنی در تابع بجای ورودی x ها $-x$ قرار بدهیم کل تابع اصلی قرینه شود.

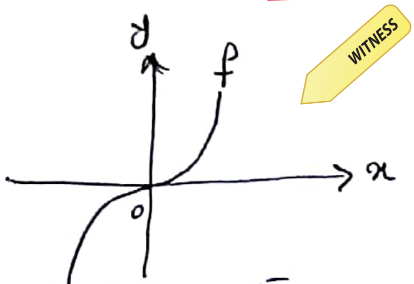
یا شکل تابع در محور مختصات نسبت به مبدأ متقارن باشد.

تعریف: تابع $f(x)$ را یک تابع زوج گوییم هرگاه ①: برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-x\in D_f$؛
② $f(-x)=f(x)$.

به عبارت دیگر هرگاه در تابع f به جای ورودی x ما $-x$ بگذاریم اصل تابع f تغییری نکند.
و یا از نظر شکل؛ شکل تابع نسبت به محور قائم، y، تقارن باشد.

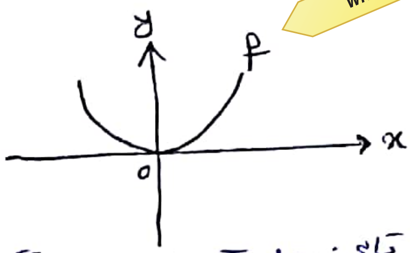
مثال:

(الف)



تابع فرد است زیرا نسبت به محورهای مختصات شکل تابع تقارن دارد.

(ب)



تابع زوج است زیرا محور y محور تقارن آن است.

* حاصلضرب دو تابع زوج، زوج است. (مثلاً زوج را علامت + بگیرید $(+)\cdot(+)=+$)
* حاصلضرب دو تابع فرد، زوج است. (مثلاً فرد را علامت − بگیرید $(-)\cdot(-)=+$)
* حاصلضرب دو تابع زوج و فرد، فرد است. ($(+)(-)=-$ یا $(-)(+)=-$)

بعضی از خواص انتگرالهای معین:

۱) اگر f تابعی فرد باشد آنگاه داریم $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx=0$. (L یک عدد حقیقی است.)

۲) اگر f یک تابع زوج باشد آنگاه داریم $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.

۳) $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)x \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ L & m=n \end{cases}$$

۴) $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}\right)x \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ L & m=n \end{cases}$$

(۳)

F-zamani

ل) $(\sin ax)(\cos bx) = \frac{1}{2}(\sin(b+a)x - \sin(b-a)x)$

$(\sin ax)(\sin bx) = \frac{1}{2}(\cos(b-a)x - \cos(b+a)x)$

$(\cos ax)(\cos bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$

تعریف سری فوریه: هرگاه تابع $f(x)$ در بازه‌ی بسته $[a,b]$ که $a<b$ است، تعریف شده باشد برای نوشتن سری فوریه آن فرض می‌کنیم این تابع متناوب با دوره تناوب T باشد و T را حساب طول بازه یعنی $b-a$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$T = 2L = b-a \Rightarrow \boxed{L = \frac{T}{2} = \frac{b-a}{2}}$$

مثال)

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow L = \frac{b-a}{2} = \frac{\frac{3\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\frac{4\pi}{2}}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow L = \pi$$

فرمول سری فوریه:

اگر تابع f در بازه‌ی $[-L, L]$ تعریف شده باشد سری فوریه‌ی آن در صورت وجود به فرمول زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L})x + b_n \sin(\frac{n\pi}{L})x}$$

که در آن ضرایب a_0 ، a_n و b_n از فرمول‌های زیر محاسبه می‌گردند و به آن‌ها ضرایب سری فوریه تابع f می‌گویند.

✓ $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$ ✓ $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$

✓ $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L})x\,dx$

نکته:

- اگر f زوج باشد $b_n=0$ می‌شود و کافیست a_0 و a_n را محاسبه کنیم، و انتگرال به $\frac{2}{L}\int_0^L$ — تبدیل می‌شود.
- اگر f فرد باشد $a_0=a_n=0$ می‌شوند و تنها b_n را محاسبه کنیم و انتگرال به $\frac{2}{L}\int_0^L$ — — تبدیل می‌شود.

۴

F-zamani

* توابع زیر در صورتی که بازه‌ی آنها به صورت متقارن یعنی $[-L, L]$ تعریف شود؛

① $\cos x$ ، $\cos^{2k} x$ ، x^2 ، x^4 ، ... و $|x|$ تابع زوج هستند.

② $\sin x$ ، x ، x^3 ، ... توابعی فرد هستند.

③ e^x نه زوج است و نه فرد، یعنی اگر سری فوریه e^x را خواسته‌اند باید هر سه ضریب a_0 ، a_n و b_n را حساب کنیم.

* اگر بازه‌ی داده شده متقارن نباشد، دیگر بحث زوج و فرد بودن مطرح نیست و باید هر سه انتگرال یعنی a_0 ، a_n و b_n را حساب کنیم.

مثال:

سری فوریه‌ی تابع $f(x)=x$ را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ بنویسید.

حل / گام اول: تعیین دوره تناوب یعنی T و L

$$T=b-a=(\pi)-(-\pi)=2\pi$$

$$L=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi \Rightarrow \boxed{L=\pi}$$

گام دوم: تشخیص زوج یا فرد بودن تابع

در نکته بالا گفتیم x فرد است.

گام سوم: محاسبه ضرایب سری‌ها

چون f فرد می‌باشد پس $a_0=a_n=0$ لذا فقط b_n را محاسبه می‌کنیم

f فرد و بازه متقارن

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)x\,dx \overset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cancel{\sin n\pi}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{-0}{n}\cancel{\cos n(0)}+\frac{1}{n^2}\cancel{\sin n(0)}\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi\right)=\frac{-2}{n}\cos n\pi=\frac{-2}{n}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n\cos nx}$$

$$\begin{cases}\cos n\pi=(-1)^n \\ \sin n\pi=0\end{cases}$$

n یک عدد طبیعی است. $(n=1,2,3,\ldots)$

FINAL

F-zamani

نکته: محاسبه‌ی انتگرال‌هایی به فرم $\int$ (چندجمله‌ای) $\sin ax$ و $\int$ (چندجمله‌ای) $\cos ax$:

برای حل چنین انتگرال‌هایی دو ستون مشتق و انتگرال درنظر می‌گیریم. در ستون مشتق، چندجمله‌ای را قرار می‌دهیم، از آن مشتق می‌گیریم و جواب مشتق را در سطر پایین می‌نویسیم و این کار را تا جایی که مشتق به صفر برسد، ادامه می‌دهیم و در سمت ستون انتگرال، از تابع sin یا cos انتگرال می‌گیریم و جواب را در سطر پایین می‌نویسیم. جواب نهایی انتگرال، مطابق نمودار زیر، محاسبه می‌شود:

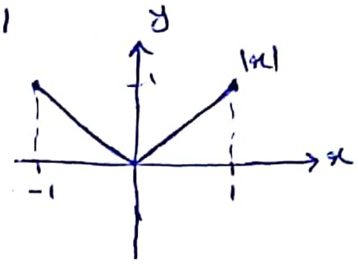
مشتق		انتگرال
f	$\oplus$	$\sin ax$
f'	$\ominus$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
f''	$\oplus$	$-\frac{1}{a^2}\sin ax$
$\vdots$		$\vdots$

۵
F-zamani

مثال: سری فوریه تابع $f(x)=|x|$ را در بازه $-1<x<1$ بنویسید.

حل

گام ۱: $L=\frac{b-a}{2}=\frac{1-(-1)}{2}=1 \Rightarrow L=1$



گام ۲: تابع $|x|$ بدلیل تقارن بودن بازه $[-1,1]$ زوج است.

گام ۳: $b_n=0$ و $a_0=?$ ، $a_n=?$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx \overset{f\ \text{زوج}}{=} \frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\,dx=\frac{2}{1}\int_0^1|x|\,dx=2\int_0^1 x\,dx=2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)=1$$

در بازه $[0,1]$ x ها مثبت هستند پس $|x|=x$ میشود.

فرمول $\boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}}$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \underset{f\ \text{زوج}}{=} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$=\frac{2}{1}\int_0^1|x|\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$

انتگرال به روش جزء به جزء حل می‌شود

مشتق	انتگرال
x	$\oplus\ \cos n\pi x$
1	$\ominus\ \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
0	$-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$

$$=2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\Big|_0^1\right)=2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi-0\right)$$

$$=0 \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}}$$

تمرین: سری فوریه تابع $f(x)=e^x$ را در بازه $0<x<2\pi$ را بدست آورید.

حل: e^x نه زوج است و نه فرد پس هر سه ضریب را حساب می‌کنیم.

$$L=\frac{b-a}{2}=\frac{2\pi-0}{2}=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx=\frac{1}{\pi}\left(e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big($$

COMPLETED

شما b_n را محاسبه کنید؟ سپس در فرمول سری فوریه قرار دهید.