مثال: سری فوریه $f(x)=x^3$ را در $(-\pi,\pi)$ بنویسید.

حل:

۱) $L=\frac{b-a}{2}=\frac{\pi-(-\pi)}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi \rightsquigarrow \boxed{L=\pi}$

۲) چون x^3 تابعی فرد است پس $a_0=a_n=0$ (یعنی ضرایب زوج سری که a_0 و a_n هستند صفر باشند) لذا b_n را محاسبه می‌کنیم.

۳) $$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L})x\,dx \xrightarrow[\text{فرد } f]{\text{بازه متقارن و}} b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L})x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\sin(\frac{n\pi}{\pi})x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\sin nx\,dx$$

(انتگرال به روش جزء به جزء تقسیمی که جلسه قبل
در مبحث کادر رنگی گفته شد حل می‌شود)

$$=\frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x^3}{n}\cos nx+\frac{3x^2}{n^2}\sin nx$$
$$+\frac{6x}{n^3}(\cos nx)+\frac{6}{n^4}\sin nx\Big|_0^\pi\Big)$$
$$=\frac{2}{\pi}\Big(\Big(-\frac{\pi^3}{n}\cos n\pi+\frac{3\pi^2}{n^2}\sin n\pi$$
$$+\frac{6\pi}{n^3}(\cos n\pi)+\frac{6}{n^4}\sin n\pi\Big)-(0)\Big)$$
$$=-2\cos n\pi\Big(\frac{\pi^2}{n}-\frac{6}{n^3}\Big)$$

x^3	$+\ \sin nx$
$3x^2$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
$6x$	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
6	$+\frac{1}{n^3}\cos nx$
0	$+\frac{1}{n^4}\sin nx$

$$=-\frac{x^3}{n}\cos nx-\frac{3x^2}{n^2}\sin nx+\frac{6x}{n^3}\cos nx+\frac{6}{n^4}\sin nx$$

۴) $$f(x)=x^3=\sum_{n=1}^{\infty}-2\cos n\pi\Big(\frac{\pi^2}{n}-\frac{6}{n^3}\Big)\sin nx$$

(بسط سری فوریه x^3)

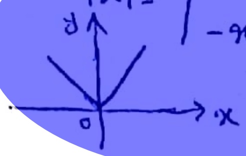
تمرین: سری فوریه $f(x)=|x|$ را در $-\pi<x<\pi$ بنویسید و نتیجه بگیرید که $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

حل

۱) $L=\frac{b-a}{2}=\frac{\pi-(-\pi)}{2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

۲) تابع $|x|$ در بازه متقارن $(-\pi,\pi)$ زوج است پس $b_n=0$ و a_0 و a_n را محاسبه می‌کنیم.

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$



Scanned by CamScanner

۲۰ (1)

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx \overset{\text{زوج}}{=} \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)=\pi \Rightarrow \boxed{a_0=\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx \overset{\text{روش جزء به جزء}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{0}{n}\sin n(0)-\frac{1}{n^2}\cos n(0)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}(-1)^n-\frac{1}{n^2}\right)=\begin{cases}0 & n=\text{زوج}\\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & n=\text{فرد}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx} \quad (*)$$

برای اثبات کردن نتیجه خواسته شده، با توجه به اینکه $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است، طبق تعریف سری فوریه مقدار سری با مقدار تابع برابر است، با قرار دادن $x=0$ در $(*)$ داریم:

$$f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8}$$

یعنی در $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ شما به ترتیب n را برابر ۱، برابر ۲ و ... قرار دادیم و با هم جمع کنیم می‌رسیم به $\frac{\pi^2}{8}$ تا بی‌نهایت جمله.

* شاید برخی دانشجویان عزیز با مفهوم Σ آشنا نباشند. بدین علامت سیگما (Summation) جمع‌وند گوییم. که برای جمع کردن تعداد شمارش‌پذیر عبارات گسسته بکار می‌رود (جمع‌وند توابع و عبارات پیوسته همان انتگرال می‌باشد.)

$$\sum_{k=1}^{4}(k^2-3)=(1^2-3)+(2^2-3)+(3^2-3)+(4^2-3)$$

Scanned by CamScanner

سری فوریه بر نیم دامنه:

تاکنون ما سری فوریه توابع متناوب را بر دامنه $(-L,L)$ یا $(a,a+2L)$ را نوشته‌ایم.

حال می‌خواهیم سری فوریه تابع $f(x)$ را بر نیم دامنه‌ی $(0,L)$ بنویسیم. که با دو نوع سری سروکار داریم:

(I) سری فوریه سینوسی بر نیم دامنه $(0,L)$:

از روابط زیر بدست می‌آید ←

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

و

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx$$

(II) سری فوریه کسینوسی بر نیم دامنه $(0,L)$:

از روابط زیر بدست می‌آید ←

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

و $a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ و $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx$

* اگر دقت کنید می‌بینید سری فوریه توابع زوج بر بازه متقارن بصورت سری فوریه کسینوسی بر نیم دامنه $(0,L)$ است و سری فوریه توابع فرد بر بازه متقارن $(-L,L)$ بصورت سری فوریه سینوسی بر نیم دامنه $(0,L)$ است.

مثال: سری فوریه سینوسی و کسینوسی بر نیم دامنه $(0,\pi)$ تابع $f(x)=x^2$ را بنویسید.

حل: a) فوریه سینوسی

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx \overset{L}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^\pi\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{-\pi^2\cos n\pi}{n}+\frac{2\cos n\pi}{n^3}\right)-\frac{2}{n^3}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left((-1)^n\left(\frac{-\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\right)-\frac{2}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow b_n=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{4}{n^3}\right) & n=2k-1 \quad (\text{فرد})\\[2mm] \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}\right)=\frac{-2\pi}{n} & n=2k \quad (\text{زوج})\end{cases}$$

k عدد صحیح است.

و $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ سری فوریه

Scanned by CamScanner

(9)   ریاضی مهندسی   خانم زمانی

b) سری فوریه کسینوسی

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3} \checkmark$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx + \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^\pi\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

فرمول

$\boxed{\cos n\pi = (-1)^n}$ $\sin n\pi = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x = \frac{2\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

COMPLETED

Scanned by CamScanner