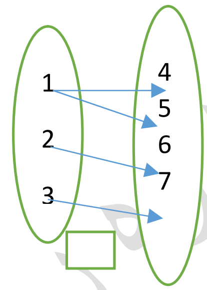
به نام خدا

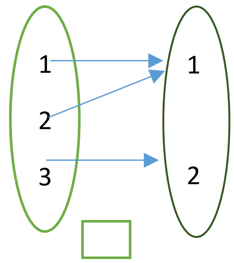
جزو درس ریاضی عمومی

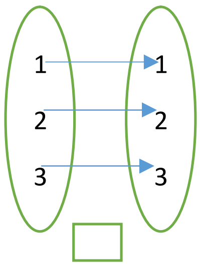
نام استاد : سرکار خانم عسگری

فصل اول :

تابع : رابطه ای است بین دو مجموعه که هر عضو از مجموعه اول را فقط به یک عضو از مجموعه دوم ببرد .







در تعریف تابع : به مجموعه اول دامنه تابع می گوئیم و آن را با D نشان می دهیم ، به مجموعه دوم برد تابع می گوئیم و آن را با R نشان می دهیم .

ضابطه : رابطه ای که بین این دو مجموعه است را ضابطه یا قانون تابع می گوئیم و آن را با f نشان می دهیم

اعضای دامنه : اعضای دامنه را با x نشان داده و اعضای برد را با y نشان می دهیم .

نمایش رابطه به صورت زوج مرتب :

در این مثال رابطه های بالارا به ترتیب به صورت زوج مرتب می نویسیم .

{(1,4),(1,5),(2,5),(3,7)}   {(1,4),(2,4),(3,7)}   {(1,3),(2,3),(3,4)}

همان طور که ملاحضه می کنید در قسمت اول مؤلفه اول 1و2و3و تکرار نشده اند و همچنین در قسمت دوم مؤلفه اول 1و2و3و تکرار نشده اند پس می توان گفت که این دو تابع هستند ، اما در قسمت سوم عدد 1 دو بار تکرارشده است در اینجا چون دو عدد یکسان است میتوان گفت که این تابع نیست .

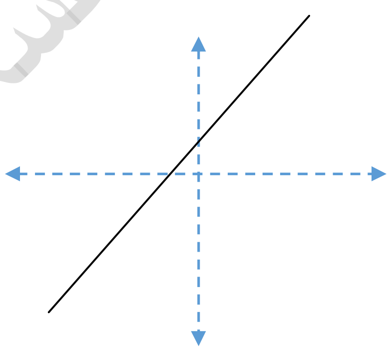
تشخیص تابع بودن از روی زوج مرتب : رابطه ای تابع است که دو زوج مرتب متمایز آن مؤلفه های اول یکسان نداشته باشند .

رسم نمودار تابع : برای رسم نمودار تابع هر یک از زوج مرتب ها را به عنوان یک نقطه در صفحه مختصات مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر وصل می کنیم

نکته : عناصر دامنه را با x و عناصر بُرد را با y نشان می دهیم

مثال : نمودار تابع زیر را رسم کنید

{(1,2)(2,3)(3,4)}



تشخیص تابع بودن از روی نمودار :

نموداری متعلق به یک تابع است که هر خط موازی محو Y ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

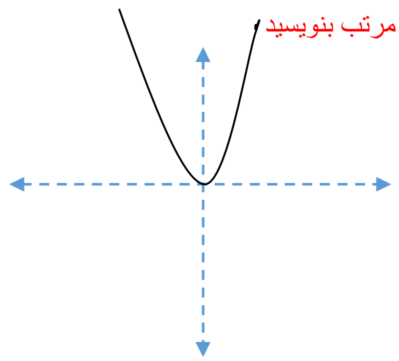
مثال : کدام یک از نمودارهای زیر متعلق به یک تابع است ؟

نمایش ضابطه تابع به صورت فرمول ریاضی :

در نظر گرفتن تابع به عنوان یک ماشین : تابع مثل ماشین لباسشویی است که وظیفه آن شستن لباس است و هر چه درونش انداخته شود فقط همان را می شوید ، تابع هر عددی به آن داده شود با این قانون (1+) می کند و لاغیر .....

مثال : اگر $A= \{-2,-1 ,2 ,1 ,2\}$ و $y= f(x) = x^2$ باشد رابطه f را به صورت زوج مرتب بنویسید .

الف) آیا تابع است ؟اگر f تابع است آن را به صورت زوج مرتب بنویسید



حل مسئله : $\{(-2,4)(-1,1)(0,0)(1,1)(2,4)\}$

ب) دامنه و برد آن را مشخص کنید ؟

ج) نمودار آن را رسم کنید

$D_f \{-2,-1,0,1,2\}$

$R_f \{4,1,0\}$

تابع است چراکه مؤلفه یکسان ندارد

مثال 2) $Y = F(X) =X^2+1$

$A=D_f =\{ -2, -1 , 0 , 1 ,2 \}$

راهنمایی برای حل مسئله :

در این قسمت کافی است بجای کلمه x مقدار مقادیر A را جایگزین کرده سپس محاسبه را انجام داده

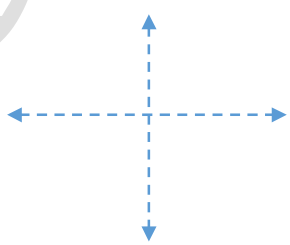
$R_F \{(-2)^3+1,(-1)^3+1 ,(0)^3 +1 ,(1)^3+1 , (2)^3+1 \}$

$R_F =\{-7 , 0 , 1 , 2 , 9 \}$

بعد از محاسبه و جایگزین کردن اعداد جواب بدست آمده را بصورت زوج مرتب می نویسیم .

$\{ (-2,-7)(-1,0)(0,1)(1,2)(2,9)\}$

همان طور که ملاحظه میکنید کافی است که اعداد A را به ترتیب با هر یک از اعداد بدست آمده از محاسبه R_F بنویسیم تا زوج مرتب این تابع بدست آید



مثال 3) اگر $H = \{ (x .y) | x \in \{0.2.8\}. 2\, y^2 = x$

الف) H را به صورت زوج مرتب بنویسید

ب) آیا H یک تابع است

$2\, y^2 = ($

$2\, y^2 =$

$2y^2 = ٤$

H = { (0,0),(2,-1),(2,1),(8,2),(8,-2)}

خیر چون مؤلفه اول یکسان داریم

نکته 1 : در فرمول رابطه هرگاه y توان 2 داشته باشد یا داخل قدر مطلق باشد رابطه نیست

نکته 2 : دو فاکتور تعیین کننده برای هر تابع دامنه و ضابطه‌ی آن می باشد .

تساوی دو تابع : دو تابع را مساوی گوئیم هرگاه دامنه ها و ضابطه‌هایشان یکسان باشد

تعریف دامنه : دامنه‌ی تابع تمام اعداد حقیقی است که اگر در ضابطه تابع قرار گیرند ضابطه تابع برای آنها تعریف شده یا با معنی است .

مثال : دامنه توابع زیر را بدست آورید ؟

$f(x) = \frac{1}{x}$ $f(0) = \frac{1}{x}$ تعریف نشده

$0 \notin D_f$ $D_f = IR - \{0\}$ کل اعداد حقیقی بجز (۰) چون تعریف نشده

$f(x) = x^2 - 1$ $D_f = IR$ چون با همه اعداد جواب می دهد و مشکلی ندارد

$f(x) = \sqrt{X}$ $D_f = IR^+$ بالای صفر زیر رادیکال جواب می دهد

روش به دست آوردن دامنه تابع :

الف) دامنه توابع چند جمله ای (IR) است .

مثال : دامنه توابع زیر را بدست آورید .

چون فرم ضابطه ای به صورت چند جمله ای نمایش داده شده

$f(x) = 2X^2 - 5X + 4$ $D_f = IR$

$f(x) = X^7 - 10X^4 + X^2 - 5$ $D_f = IR$

$f(x) = 3X - 1$ $D_f = IR$

ب) دامنه توابع کسری به فرم $f(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ برابر است با $D_f = D_P \cap D_q - \{X | q(X) = 0\}$

مثال : دامنه توابع زیر را بدست آورید

(۱)

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{3x + 4}$$

$$3x + 4 = 0 \Longrightarrow 3x = -4 \Longrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$D_f = IR \cap IR - \{-\frac{4}{3}\} \Longrightarrow D_f = -IR - \{-\frac{4}{3}\}$$

(۲)

$$f(x) = \frac{x^7 - 2x^6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$D_f = IR \cap IR - \{2,3\}$$

$$X - 5X + 6 = 0$$

$$(X - 2)(X - 3) \Longrightarrow \quad X - 2 = 0 \Longrightarrow X = 2 \quad X - 2 = 0 \Longrightarrow X = 2$$

ج) دامنه توابع رادیکالی
- با فرجه فرد برابر است با دامنه عبارت زیر رادیکال
- با فرجه زوج عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار داده و نامعادله حاصل را حل می کنیم

مثال : دامنه توابع زیر را بدست آورید .

$$f(x) = \sqrt[3]{7X^2 - 10X + 4} \quad f(x) = 7X^2 - 10X + 4 \qquad D_f = IR$$

$$f(x) = \sqrt{3X - 5} \qquad 3x - 5 \geq 0 \Longrightarrow 3X - 5 = 0 \Longrightarrow 3X = 5 \Longrightarrow X = \frac{5}{3}$$

X	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3X - 5$		$-$	0	$+$	

$$D_f = \left[\frac{5}{3} \text{ و } +\infty\right)$$

مثال : دامنه توابع زیر را بدست آورید

$f(x)=\frac{۲x+۵}{x^۲+۱}$ $\quad D_f = IR \cap IR - \varnothing = IR \quad X^۲+۱=۰ \quad X^۲=-۱$ معادله جواب ندارد

$f(x)=\sqrt{X^۲-۲X+۱} \quad X^۲-۲X+۱ \geq ۰ \Longrightarrow (x-۱)(x-۱)=۰$

$x=+۱ \qquad x=+۱$

	+۱	
+	o	+

$D_f = IR - \{+۱\} \quad (-\infty, +\infty)$

$D_f = IR$

$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲X-۷}} \quad ۲X-۷>۰ \Longrightarrow ۲X>۷ \Longrightarrow X>\frac{۷}{۲} \qquad D_f=(\frac{۷}{۲},+\infty)$

	$-\infty$	$\frac{۷}{۲}$	$+\infty$
$۲X-۷$	−	o	+

$f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲X-۵}{X^۲-۱}} \quad \frac{۲X-۵}{X^۲-۱} \Longrightarrow X^۲-۱=۰ \Longrightarrow X=\pm۱ \Longrightarrow D_f=IR-\{۱,-۱\}$

$f(x)=\sqrt{\frac{۴-۷X}{X-۲}} \quad \frac{۴-۷X}{X-۲}\geq۰\Longrightarrow$ دامنه صورت $۴-۷X\geq۰\Longrightarrow۴=۷X\Longrightarrow\frac{۴}{۷}=X$

ریشه مخرج $X-۲=۰\Longrightarrow X=+۲$

X	$-\infty$	$\frac{۴}{۷}$		۲		$+\infty$
$۴-۷X$	+	o	−		−	
$X-۲$	−		−	o	+	
	−		+		−	

$D_f=[\frac{۴}{۷} \text{ و } ۲)$

$f(x)=\sqrt[۴]{\frac{۳-X^۲}{X+۱}} \quad ۳-X^۲\geq۰\Longrightarrow۳-X^۲=۰\Longrightarrow X=\pm\sqrt{۳}$

$X+۱\Longrightarrow X=-۱$

X	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$		$+\sqrt{۳}$	$+\infty$
$۴-۷X$	−	o	+	o	−

$D_f=[-\sqrt{۳} \text{ و } \sqrt{۳}] \cap IR-\{-۱\} = D_f[-\sqrt{۳} \text{ و } -۱) \cup (-۱ \text{ و } \sqrt{۳}]$

ضابطه توابع

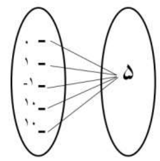
۱- توابع ثابت : $f(x) = k$ (k یک عدد حقیق است)

دامنه این نوع توابع (IR) و بررسی ($\{K\}$) است

$f(x) = ۵$

$f(۰) = ۵$ $f(۱) = ۵$ $(۰,۵)$ $(۱,۵)$

$f(۱) = ۵$ $f(-۱) = ۵$



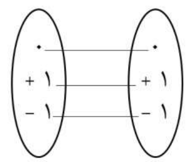
$D_f = IR$

$D_f = \{۵\}$

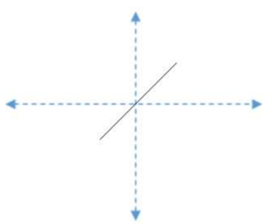
۲ - تابع همانی : ($y = f(x) = x$) دامنه و برد این تابع IR است

$f(۱) = ۱$ $f(۰) = ۰$ $f(-۱) = -۱$

$(۱,۱)$ $(۰,۰)$ $(-۱,-۱)$



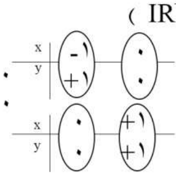
هر نقطه را به خود نقطه می برد



۳) تابع قدر مطلق : ($Y = F(X) = |X|$) دامنه این تابع IR و بردش اعداد حقیقی + است (IR^+)

$|x| =$

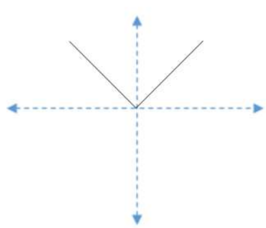
$$f(x)=|x| = \begin{cases} -x & x < ۰ \\ x & x \geq ۰ \end{cases}$$



نکته : کار قدر مطلق مثبت کردن اعداد است $|-۲| = +۲$

نکته : تعیین دامنه و برد از روی نمودار تابع : دامنه : تصویر نمودار از روی محور x

برد : تصویر نمودار از روی محور y



IR دامنه برد = $[۰ و +\infty) = IR^+$

$D_f = IR$ $R_f = [۰, +\infty) =$

نمودار تاریع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید

نکته : تعریف قدر ملطق : اگر عبارت داخل قدر مطلق منفی باشد قرینه می شود که مثبت شود

$y = f(x) = |x - ۲|$

D_f دامنه = IR

D_f برد = IR^+

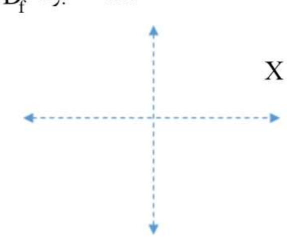
$X < ۲$

x	-۱	۲
y	۳	۰

$X \geq ۲$

x	+۳	۲
y	۱	۰

$$|x - ۲| = \begin{cases} -(x-۲) & x-۲<۰ & \rightarrow \\ +(x-۲) & x-۲\geq۰ & \rightarrow \end{cases} = |x-۲| \begin{cases} -(x-۲) & x-۲<۰ \\ x+۲ & x-۲\geq۰ \end{cases}$$



مثال : رسم نمودار و دامنه و برد را مشخص کنید ؟ $f(x) = |x| - 2$

$$|x| = \begin{cases} -(x) & x < 0 \\ (x) & x \geq 0 \end{cases} \qquad = |x| = \begin{cases} -x - 2 & x < 0 \\ x - 2 & x > 0 \end{cases}$$

X	0	-1
Y	-2	-1

X	0	1
Y	-2	-1

$D_f = IR$

$R_f = [-2 , +\infty)$

F (0) = - (0) -2 = -2

F(-1) = -(-1) -2 = -1

F(0) = (0)(-2)=-2

F(1)=(1)-2=-1

تابع جز صحیح $y = f(x) = [x]$ دامنه این تابع IR و بردش Z است و ضابطه آن به فرم زیر است .

مثال :

$$\boxed{\begin{array}{c} n \leq x < n+1 \\ [x]=n \end{array}}$$

[-2,2] : $-2 \leq x < -1$. $-1 \leq x < 0$. $0 \leq x < 1$. $1 \leq x < 2$

Y=[x] = -2   y = [x] = -1   y= [x] = 0   y=[x]=1

نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و بردش را مشخص کنید .

Y=f(x)=[x] +3

[-2,+2]

فرم صحیح حل کردن y=[x]+3 = -2+3

$n \leq x < n+1$

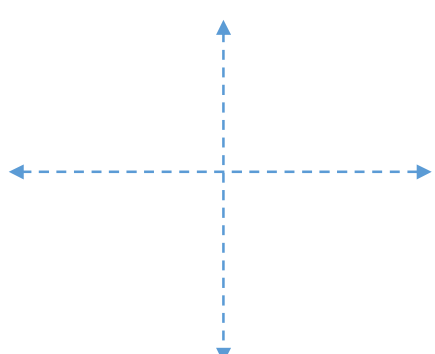
$2 \leq x < -1$. $-1 \leq x < 0$ . . $0 \leq x < 1$. $1 \leq x < 2$

Y= -2 +3 = +1 . y= -1+3=+2 . y= 0 + 3 = 3 , y= 1+3=4

وقتی x بین 1- و 2- بوده y شده 1+ سپس یک واحد بالا می رویم چون X بین 1+ و 1- است

D_f=IR

R_f=Z



5) تابع چند ضابطه ای : گاهی اوقات دامنه تابع به چند قسمت جدا از هم تقسیم شده و برای هر قسمت ضابطه ای جداگانه داریم به فرم زیر

نکته : در این حالت D_f می شود اجتماع دامنه ها و برد f هم می شود اجتماع برد ها

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1\\ f_2(x) & x\in D_2\\ f_n(x) & x\in D_n\end{cases}$$

مثال : نمودار تابع زیر را رسم کرده دامنه و برد آن را مشخص کنید .

D sgn = IR   Rsgn = {-1 , 0 , 1 }

$$sng\ (x)=\begin{cases} -1 & x<0\\ 0 & x=0\\ +1 & x>0\end{cases}$$

x	-1	0	+1
y	+1	0	-1

D_f= IR

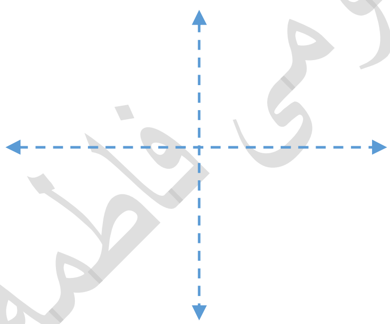
$$f\ (x)=\begin{cases} x+2 & x<-1\\ -x-1 & -1\le x<1\\ 2\,x-3 & x\ge 1\end{cases}$$

x	-1	0	1
y	+1	0	-1

D_f = IR

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1\\ -x & -1<x<1\\ 2\,x-2 & x\ge 1\end{cases}$$

x	-1	0	+2
v	1	0	+2



مثال : نمودار توابع زیر را رسم کرده دامنه وبرد آن را مشخص کنید

الف) y=f(x) = lx+3l -1

ب) y = f(x) = l x l +3

ج) y= f (x) = [x] -2

جبرتوابع :

1) جمع دو تابع f , g را با f+g نشان داده می شود

F+g (x) = f(x)+g(x) $D_{f+g} = D_f$ n D_g

2) تفریق دو تابع F , g را با F-g نشان داده می شود

F-g (x) = f(x)-g(x) $D_{f\text{-}g} = D_f$ n D_g

3) ضرب دو تابع f , g را با f.g نشان داده می شود

F.g (x) = f(x).g(x) $D_{f.g} = D_f \cap D_g$

4) تقسیم دو تابع f , g را با $\frac{f}{g}$ نشان داده می شود

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{ x \mid g(x) = 0 \}$$

مثال 1) اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $y(x) = \sqrt{x}$ باشد دامنه و ضابطه ای توابع $(\frac{f}{g}).(f \times g).(f - g).(f + g)$ را مشخص کرده

مقادیر $(\frac{f}{g}) = 2 \ . \ (f \times g) = 3 \ . \ (f - g) = 2 \ . \ (f + g) = 0$ را بدست آورید؟

الف)

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = [0,1) \cup (1,+\infty)$

$IR - \{1\} \cap [0, \infty) = [0.1) \cup (1.+\infty)$

$D_f = IR - \{1\}$

$$\sqrt{X} \ . \ x \geq 0 \ [0 + \infty)$$

$$g(x) \to \sqrt{x} = 0 \to x = 0 \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x = 0\} = (0.1) \cup (1.+\infty]$$

ب) ضابطه

$$f + g\,(x) = f(x) + g\,(x) = \frac{x}{x-1} + \sqrt{x}$$

$$f - g(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - \sqrt{x}$$

$$f.g\,(x) = f(x).g(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right) \times (\sqrt{x})$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{x}}$$

ج)

$$f + g\,(0) = f(0) + g\,(0) = \frac{0}{0-1} + \sqrt{0} = 0 + 0 = 0$$

$$f - g(2) = f(2) - g(2) = \frac{2}{2-1} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$f.g\,(3) = f(3) \times g(3) = \frac{3}{3-1} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{\frac{2}{2-1}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مثال 2)

اگر $f(x)=3x-1$ و $g(x)=x^2-4$ دامنه $f(x)$ و g و $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

$\frac{f}{g}(3)$ و $f-g(1)$ و $f+g(0)$

$D_{f+g}=D_{f.g}=IR \qquad IR\cap IR=IR$

$D_f=IR \,,\, D_g=IR$

$x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

$D_{\frac{f}{g}}=IR-\{\pm 2\}$

$f+g(0)=f(0)+g(0)=(3\times 0-1)+((0)^2-4)^4=(-1)+(-4)=-5$

$f-g(1)=f(1)-g(1)=(3\times 1-1)-(1^2-4)=-2-(-3)=5$

$\frac{f}{g}(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{3\times 2-1}{3^2-4}=\frac{8}{5}$

ترکیب توابع : ترکیب در توابع *(f.g)* را با *(fog)* نشان داده

$fog(x)=f(g(x))$

$gof(x)=g(f(x))$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

حد و پیوستگی :

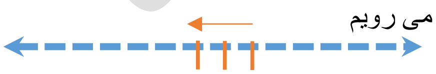
حد تابع :

منظور از بدست آوردن حد تابع f(x) در نقطه X=a این است که رفتار تابع را در نزدیکی X=a بررسی کنیم یعنی وقتی x به سمت عدد a نزدیک می شود f(x) به سمت چه عددی می رود ؟ این عدد را با L نشان داده و آن را حد تابع f(x) در نقطع X=a گوئیم و می نویسیم.

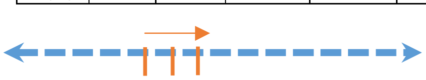
$$\lim_{x\rightarrow a} f(x)$$

مثال : حد تابع $f(x)=x+1$ را در نقطه x=0 بدست آورید

یکبار از سمت راست + به سمت 0 صفر می رویم ، یکبار از سمت چپ – به سمت 0 صفر می رویم



x	1	0/5	0/25	0/01	0/001	0/0001
F(x)	1	0/5	1/25	1/01	1/001	1/0001



$\lim_{x\rightarrow 0^+} f(x)=1$

$\lim_{x\rightarrow ۰^+} f(x)=۱$

$\lim f(x)=1$